INSA DE TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ÈRE ANNEE

CONTROLE CONTINU ELECTROSTATIQUE. Durée 1 heure

Il est possible de poursuivre certains exercices même si l'on n'a pas su répondre à une question. Nous recommandons donc de regarder l'intégralité du sujet.

Exercice 1 (Opérateurs et Circulations) 7 points

On considère une région de l'espace décrite en coordonnées cartésiennes où règne un champ électrique uniforme dont l'expression vectorielle est :

$$\vec{E} = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

1°) Expliquer simplement pourquoi ce champ électrique est qualifié d'uniforme.

2°) Exprimer le module du champ électrique en fonction de E_0.

On désire calculer la circulation du champ électrique de O à A en empruntant le parcours brisé en segments **rectilignes** suivant : de O $(0,0,0)$ à $A_1(a,0,0)$ puis de A_1 à A_2 $(a,a,0)$ puis de A_2 à A (a,a,a) où a est la longueur de chacun des segments.
3°) Calculer les circulations de $\vec{E}$, le long de ces 3 segments rectilignes successifs. Si certaines circulations sont nulles, bien expliquer pour quelle raison. En déduire la circulation totale de O à A en passant par A_1 et A_2.

On désire maintenant calculer la circulation de ce champ électrique le long d'un trajet **rectiligne** partant du point O $(0,0,0)$ et allant directement au point A (a,a,a).
4°) Donner en coordonnées cartésiennes, l'expression vectorielle du déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ à considérer en tout point M du trajet $\overline{OA}$.

5°) Calculer la circulation totale de O à A : C_{OA} et donner son expression en fonction de E_0 et a.

6°) On définit le champ de scalaire $V(x,y,z)$ à partir du champ uniforme $\vec{E}$, par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

Est-ce que selon vous, V est un champ de scalaire uniforme ? Justifiez votre réponse sans calcul.

7°) En utilisant la propriété du gradient, démontrer que : $C_{OA} = V(O) - V(A)$.

Exercice 2 (Opérateurs, invariances, système de coordonnées) 5 points

Le champ de scalaire suivant représente un potentiel électrique exprimé en coordonnées sphériques notées (r,θ,φ) où a est une constante positive et e la charge électrique élémentaire :

$$V(r) = \frac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{\exp\left(\frac{-r}{a}\right)}{r}$$

1°) Quelle est l'unité de la constante a ?

2°) Le champ électrique $\vec{E}$ associé à ce potentiel électrique est défini en coordonnées sphériques par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

On rappelle ici l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

Calculer le module du champ électrique $\vec{E}$ associé à V. Préciser dans le système de coordonnées sphériques, l'orientation du vecteur champ en tout point M de l'espace.

3°) En examinant les expressions de V ou de $\vec{E}$ nous cherchons quelles sont les invariances du système de charges qui a généré ces grandeurs électriques. Selon vous ce système est-il invariant par :

- Toute translation rectiligne dans la direction du vecteur $\vec{e}_z$
- Toute translation rectiligne dans la direction du vecteur $\vec{e}_r$
- Toute rotation autour de l'axe z
- Toute rotation autour du point O

Attention de bien répondre par oui ou par non à l'ensemble des 4 questions posées.

Exercice 3 (Invariances et Symétries/Antisymétries d'un champ vectoriel) 8 points

On considère un fil circulaire (supposé sans épaisseur) de centre O et de rayon R contenu dans le plan (x, O, y). Cet anneau est chargé avec une densité uniforme de charges par unité de longueur λ positive.

1°) Dessiner ce système.

2°) Donner toutes les invariances du système, en déduire le système de coordonnées adapté à son étude et de quelles variables dépendent les différentes composantes du champ électrique $\vec{E}$, généré par cet anneau.

3°) Soit un point M quelconque de l'espace. Définir précisément tous les plans de symétrie ou d'antisymétrie du système contenant ce point M. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{E}(M)$ qui sont nulles au point M, dans le système de coordonnées choisi. On rappelle que le champ électrique $\vec{E}$ possède un caractère de « vrai » vecteur.

4°) Soit le point M', situé sur l'axe z à une hauteur z au-dessus du plan (x,O,y). Définir précisément tous les plans de symétrie ou d'antisymétrie du système contenant ce point M'. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{E}(M')$ qui sont nulles au point M'.

5°) On se place désormais au centre de l'anneau, au point O. Définir précisément tous les plans de symétrie ou d'antisymétrie du système contenant le point O. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{E}(O)$ qui sont nulles au point O.

Exercice 4 – BONUS (Invariances et Symétries/Antisymétries d'un champ pseudo-vectoriel) 2 points

On considère un fil circulaire (supposé sans épaisseur) de centre O et de rayon R contenu dans le plan (x, O, y). Cet anneau est parcouru par un courant électrique I circulant dans le sens trigonométrique (anti-horaire).

1°) Dessiner ce système, orienter correctement le courant en le symbolisant par une flèche.

2°) Donner toutes les invariances du système, en déduire le système de coordonnées adapté à son étude et de quelles variables dépendent les différentes composantes du champ magnétique $\vec{B}$, généré par cette boucle de courant.

3°) Soit un point M quelconque de l'espace. Définir précisément tous les plans de symétrie ou d'antisymétrie du système contenant ce point M. En déduire la ou les composantes du champ $\vec{B}(M)$ qui sont nulles au point M, dans le système de coordonnées choisi. On rappelle que le champ magnétique $\vec{B}$ possède un caractère de « pseudo » vecteur et qu'il est donc contenu dans les plans d'antisymétrie mais perpendiculaire aux plans de symétrie.